Kapitel 4

Funktionen

4.1 Lineare, quadratische und allgemeine Funktionen

4.1.1 Lineare Funktionen

Definition 4.1.1.1. *Zuordnungen der Form $y = m \cdot x + b$ mit beliebigen, konstanten Zahlen (Parametern) m und b heißen **lineare Zuordnungen** oder **lineare Funktionen**. Die x-Werte werden als Argumente (Stellen), die y-Werte als Funktionswerte bezeichnet.*

Satz 4.1.1.2. *Eine lineare Funktion wird durch die Vorgabe der Funktionswerte an zwei verschiedenen Stellen eindeutig festgelegt.*

Info 4.1.1.3. *Der Graph einer linearen Funktion $y = mx+b$ ist eine Gerade. Man bezeichnet m als Anstieg (**Steigung**) und b als y-**Achsenabschnitt** der Gerade. Der Anstieg kann jedem Steigungsdreieck entnommen werden. Der y-Achsenabschnitt b beschreibt den Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse. Gilt $y_0 = mx_0 + b$, so liegt der Punkt $P_0 = (x_0; y_0)$ auf der Geraden. Eine Gerade wird durch die Angabe von zwei verschiedenen Punkten eindeutig beschrieben.*

Definition 4.1.1.4. *Die folgende Gleichung heißt **Punkt - Richtungs - Form** der Geradengleichung:*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m\,.$$

*Die folgende Gleichung heißt **Zwei - Punkte - Form** der Geradengleichung:*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Definition 4.1.1.5. *Eine Gleichung der Gestalt*

$$Ax + By + C = 0$$

*heißt **lineare Gleichung** (in zwei Variablen). Ist $B \neq 0$, so wird die folgende lineare Funktion beschrieben:*

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Im Fall $B = 0$ und $A \neq 0$ erhalten wir die Gleichung $x = \frac{-C}{A}$. Diese stellt zwar keine Funktion dar, der zugehörige Graph ist aber eine zur $y-$Achse parallele Gerade, die die $x-$Achse in $x = \frac{-C}{A}$ schneidet.

Definition 4.1.1.6. *Eine Zahl x_0 heißt **Nullstelle** einer linearen Funktion $y = mx + b$, wenn gilt:*

$$mx_0 + b = 0.$$

Die Nullstelle ist die Stelle, an welcher der Graph die x-Achse schneidet.

Satz 4.1.1.7. *Zwei Geraden knnen zusammenfallen, parallel sein oder sich in genau einem Punkt schneiden.*

4.1.2 Quadratische Funktionen

Definition 4.1.2.1. *Eine Funktionsgleichung $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ wird **Scheitelpunktform** einer Parabel genannt.*

Satz 4.1.2.2. *Bei einer Parabel*

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

haben wir für $a < 0$ einen Hochpunkt und für $a > 0$ einen Tiefpunkt im Scheitel. Werte oberhalb bzw. unterhalb des Scheitelwertes werden nicht als Funktionswerte angenommen. Werte unterhalb bzw. oberhalb des Scheitelwertes werden an zwei verschiedenen Stellen als Funktionswerte angenommen.

Definition 4.1.2.3. *Zuordnungen der Form $y = ax^2 + bx + c$ mit beliebigen, konstanten Zahlen (Parametern) a, b und c (mit $a \neq 0$) bezeichnen wir als **quadratische Zuordnungen** oder **quadratische Funktionen**. Die x-Werte werden als **Argumente** (Stellen), die y-Werte als **Funktionswerte** bezeichnet.*

Satz 4.1.2.4. *Die Graphen quadratischer Funktionen stellen Parabeln dar.*

Definition 4.1.2.5. *Der Punkt*

$$(x_s; y_s) = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

*heißt **Scheitelpunkt** der Parabel $y = ax^2 + bx + c$. Im Fall $a < 0$ stellt der Scheitelpunkt einen Hochpunkt dar (Der Scheitelwert ist das Maximum aller Funktionswerte). Im Fall $a > 0$ stellt der Scheitelpunkt einen Tiefpunkt dar. (Der Scheitelwert ist das Minimum aller Funktionswerte).*

Info 4.1.2.6. *Durch die Vorgabe des Scheitelpunkts $(x_s; y_s)$ und eines weiteren Punktes (x_0, y_0) wird eine Parabel festgelegt:*

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Der Parameter a wird aus der Gleichung ermittelt:

$$y_0 = a(x_0 - x_s)^2 + y_s\,.$$

Im Fall $|a| < 1$ wird die Parabel entlang der y-Achse gestaucht, im Fall $|a| > 1$ wird die Parabel entlang der y-Achse gestreckt.

4.1.3 Funktionen und ihre Eigenschaften

Definition 4.1.3.1. *Wir definieren eine **Funktion** durch ihren **Definitionsbereich** $D \subset \mathbb{R}$ und die **Funktionsvorschrift** f, die jedem Element x aus D eindeutig eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet:*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)\,.$$

*Wir vereinbaren wieder folgende Bezeichnungen: x heißt **Argument** und $y = f(x)$ heißt **Funktionswert**. Die Bezeichnungen unabhängige Variable für x und abhängige Variable für y sind ebenfalls gebräuchlich.*

Definition 4.1.3.2. *Die **Gleichheit zweier Funktionen** $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ liegt genau dann vor, wenn sie einen gemeinsamen Definitionsbereich $D = D_f = D_g$ haben und für jedes x aus D gilt: $f(x) = g(x)$.*

Info 4.1.3.3. *Eine reelle Funktion veranschaulicht man in der Ebene durch ein Schaubild. Die Teilmenge der Ebene*

$$\{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}$$

*bezeichnet man als **Graph** der Funktion f. Man lässt die Variable x den Definitionsbereich durchlaufen und bildet alle Paare $(x, f(x))$.*

Definition 4.1.3.4. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Als **Wertebereich** $f(D)$ von f bezeichnen wir die Menge aller y aus $\mathbb{R}$, die als Funktionswert angenommen werden. y liegt also im Wertebereich von f, wenn es mindestens ein x aus dem Definitionsbereich von f mit $f(x) = y$ gibt. Man nennt y dann auch **Bild** und x **Urbild**.*

Definition 4.1.3.5. *Haben zwei Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ einen gemeinsamen Definitionsbereich, so können sie auf folgende Art **addiert** und **multipliziert** werden:*

$$\begin{aligned} f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)\,, \\ f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)\,. \end{aligned}$$

*Analog zur Addition erkärt man die **Subtraktion**:*

$$f - g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

*Die **Division** $\frac{f}{g}$ ist nur möglich, wenn für alle x aus D der Funktionswert $g(x) \neq 0$ ist. In diesem Fall setzen wir:*

$$\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Definition 4.1.3.6. *Seien $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Der Wertebereich $f(D_f)$ von f sei im Definitionsbereich D_g von g enthalten. Dann können wir g nach f ausführen:*

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

*und erhalten die **Verkettung** von f und g (sprich g verknüpft mit f). Wir schreiben dafür:*

$$\begin{aligned} (g \circ f) : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad x \mapsto g(f(x)), \\ &\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))\,. \end{aligned}$$

Es sind auch Verkettungen von mehr als zwei Funktionen möglich.

Definition 4.1.3.7. *Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **injektiv**, wenn es zu jedem Funktionswert y aus dem Wertebereich genau ein Argument x gibt mit $f(x) = y$. (Die Zuordnung kann innerhalb des Wertebereiches umgekehrt werden).*

Definition 4.1.3.8. *Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei injektiv. Dann besitzt die Gleichung $y = f(x)$ bei gegebenem y aus dem Wertebereich von f genau eine Lösung x aus dem Definitionsbereich von f. Man schreibt*

$$x = f^{-1}(y)$$

*und definiert die **Umkehrfunktion:***

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow D, \quad y \mapsto f^{-1}(y).$$

Satz 4.1.3.9. *Es gilt für alle x aus dem Definitionsbereich von f, wenn f injektiv ist:*

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

und für alle y aus dem Wertebereich von f:

$$f(f^{-1}(y)) = y\,.$$

Schreibweise: Nach dem Berechnen der Umkehrfunktion geht man zur Darstellung $f^{-1} : x \mapsto f^{-1}(x)$ für alle x aus $f(D)$ über. Man kann dann die Funktion und die Umkehrfunktion in ein gemeinsames Schaubild zeichnen.