Kapitel 1

Rechengesetze

1.1 Körperaxiome und Rechenregeln

1.1.1 Binomische Formeln

Aufgabe 1.1.1.1. *1. Multiplizieren Sie nacheinander schrittweise folgende Terme aus und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich!*

$$(a+b)(c+d), \qquad (u+d)(u+t), \qquad (h+g)(h+g),$$
$$(f+k)^2, \qquad (w+b)(b-w), \qquad (e+i)(e-i),$$
$$(z-v)(v-z), \qquad (s-l)(s-l), \qquad (s-l)^2$$

Für bestimmte Gleichungen gibt es Regeln, die Ihnen einige Zwischenschritte und damit Zeit und Arbeit sparen. Für welche dieser Umformungen kennen Sie Regeln und welche sind dies?
Lösung:

$$\begin{aligned}
(a+b)(c+d) &= ac+bc+ad+bd \\
(u+d)(u+t) &= u^2+du+ut+dt \\
(h+g)(h+g) &= h^2+hg+gh+g^2 = h^2+2hg+g^2 \\
(f+k)^2 &= (f+k)\cdot(f+k) = f^2+kf+fk+k^2 = f^2+2fk+k^2 \\
(w+b)(b-w) &= wb+b^2-w^2-bw = b^2-w^2 \\
(e+i)(e-i) &= e^2+ie-ei-i^2 = e^2-i^2 \\
(z-v)(v-z) &= zv-v^2-z^2+zv = -v^2+2zv-z^2 \\
(s-l)(s-l) &= s^2-ls-sl+l^2 = s^2-2sl+l^2 \\
(s-l)^2 &= (s-l)\cdot(s-l) = s^2-2sl+l^2
\end{aligned}$$

Fazit:
Sind die Terme in einer bestimmten Form gegeben, so können wir diese direkt mit Hilfe der drei ***binomischen Formeln*** *ohne Zwischenschritte umwandeln. Die drei Formeln lauten:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2
\end{aligned}$$

2. *Bei manchen mathematischen Berechnungen müssen Summen in Produkte umgewandelt werden (Faktorisieren). Ein Schüler der 8. Klasse konnte den Term c^2-h^2 direkt in ein Produkt umwandeln.*
Können Sie das auch? Begründen Sie, wieso Ihr Ergebnis richtig ist.
Überlegen Sie, bei welchen anderen Termen eine Faktorisierung "auf den ersten Blick" möglich ist!
Lösung:
Da mit $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ natürlich auch $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ gilt, lassen sich die binomischen Formeln nicht nur zum Ausmultiplizieren sondern auch zur Faktorisierung verwenden.
Somit gilt aufgrund der dritten binomischen Formel auch:

$$c^2-h^2 = (c+h)(c-h)\,.$$

3. *Stellen Sie auf der Basis Ihrer bisherigen Entdeckungen drei Gleichungen auf, die Ihnen sowohl beim Ausmultiplizieren als auch beim Faktorisieren von Termen helfen.*
   Lösung:
   Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.1.1.2. *Auch mit der dritten binomischen Formel lassen sich scheinbar schwere Multiplikationen leicht im Kopf berechnen. Lösen Sie die folgenden Aufgaben im Kopf und schreiben Sie vorher auf, wie Sie die Rechnung modifizieren müssen, um die dritte binomische Formel anwenden zu können.*

- $71 \cdot 69$
  Lösung:

$$71 \cdot 69 = (70+1) \cdot (70-1) = 4900 - 1 = 4899$$

- $79 \cdot 81$
  Lösung:

$$79 \cdot 81 = (80-1) \cdot (80+1) = 6400 - 1 = 6399$$

- $48 \cdot 52$
  Lösung:

$$48 \cdot 52 = (50-2) \cdot (50+2) = 2500 - 4 = 2496$$

- $1001 \cdot 999$
  Lösung:

$$1001 \cdot 999 = (1000+1) \cdot (1000-1) = 1000000 - 1 = 999999$$

Aufgabe 1.1.1.3. *Berechnen Sie im Kopf*

- $44^2 - 43^2$
  Lösung:

$$44^2 - 43^2 = (44-43) \cdot (44+43) = 1 \cdot 87 = 87$$

- $101 \cdot 99$
  Lösung:

$$101 \cdot 99 = (100+1)(100-1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$$

- $205 \cdot 195$
  Lösung:

$$205 \cdot 195 = (200+5)(200-5) = 200^2 - 5^2 = 40000 - 25 = 39975$$

- $1002^2 - 1001^2$
  Lösung:

$$1002^2 - 1001^2 = (1002+1001) \cdot (1002-1001) = 2003 \cdot 1 = 2003$$

Fehler 1.1.1.4
$(3x+5y)^2 = 3x^2 + 30xy + 5y^2$

Erläuterung:
Falsches Potenzieren: Es wurde vergessen, die einzelnen Terme ($3x$ bzw. $5y$) komplett zu quadrieren.
Korrekte Lösung: $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.
Fehler 1.1.1.5
$(1-m)(m+1) = m^2 + 1$

Erläuterung:
Vorzeichenfehler: Vor m^2 fehlt das Minuszeichen.
Korrekte Lösung: $(1-m)(m+1) = (1-m)(1+m) = 1^2 - m^2 = -m^2 + 1\,.$

Fehler 1.1.1.6
$(8z + 9w)^2 = 64z^2 + 81w^2$

Erläuterung:
Missachtung der Termstruktur: Die Klammer wurde einfach aufgelöst und der Exponent auf die Summanden verteilt. Hier hätte die erste binomische Formel angewandt werden müssen.
Korrekte Lösung: $(8z+9w)^2 = (8z)^2 + 2 \cdot 8z \cdot 9w + (9w)^2 = 64z^2 + 144wz + 81w^2\,.$

Fehler 1.1.1.7
$(2t - 4)(9t + 5) = 18t^2 - 46t - 20$

Erläuterung:
Missachtung der Voraussetzungen: Bei diesem Beispiel ist die Anwendung einer binomischen Formel nicht möglich.
Korrekte Lösung: $(2t-4)(9t+5) = 2t \cdot 9t + 2t \cdot 5 + (-4) \cdot 9t + (-4) \cdot 5 = 18t^2 - 26t - 20\,.$

Fehler 1.1.1.8
$(9p - 7s)(9p + 7s) = 81p - 49s$

Erläuterung:
Hier wurde vergessen, die Variablen p und s zu quadrieren.
Korrekte Lösung: $(9p-7s)(9p+7s)^2 = (9p)^2 - (7s)^2 = 81p^2 - 49s^2\,.$

Fehler 1.1.1.9
$(-9 - i)(6 - i) = -i^2 + 3i + 54$

Erläuterung:
Mehrere Fehler: Eine binomische Formel kann hier nicht angewandt werden, da hierzu die Voraussetzungen fehlen. Zudem wurden die binomischen Formeln falsch angewandt.
Korrekte Lösung: $(-9-i)(6-i) = (-9) \cdot 6 + (-9) \cdot (-i) + (-i) \cdot 6 + (-i) \cdot (-i) = -54 + 9i - 6i + i^2 = i^2 + 3i - 54\,.$

Fehler 1.1.1.10
$(-d + e)^2 = -d^2 - 2de + e^2$

Erläuterung:
Vorzeichenfehler: Das Minuszeichen vor d^2 ist falsch, da $(-d)^2 = d^2$. Es wurde also falsch quadriert.
Korrekte Lösung: $(-d+e)^2 = (-d)^2 + 2 \cdot (-d) \cdot e + (e)^2 = d^2 - 2de + e^2\,.$

Aufgabe 1.1.1.11. ***(Plattenleger - Problem)***
Ein Plattenleger macht eine interessante Entdeckung: Jedes Mal, wenn er eine quadratische Fläche auslegen soll, bei der an jeder Seite eine ungerade Anzahl Platten liegt, bleibt ausgerechnet stets genau ein Feld frei, wenn er die Kacheln bei seinem Händler in der 8er - Packung kauft.
Finden Sie eine Erklärung für dieses Phänomen!
Lösung:
Ungerade Zahlen lassen sich durch den Term $2n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Damit ist die Anzahl der zu verlegenden Platten bei einer quadratischen Fläche mit ungerader Plattenzahl an jeder Seite genau $(2n-1)^2$.
Mit Hilfe der binomischen Formel ergibt sich hieraus: $(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$. Da allerdings $4n^2 - 4n = 4n(n-1)$ ist, wird für alle $n \in \mathbb{N}$ der Faktor 4 hier stets mit einer geraden Zahl multipliziert, da ja entweder n oder $n-1$ gerade ist. Das Produkt aus 4 und einer geraden Zahl ergibt jedoch stets ein Vielfaches von 8, so dass auch $4n^2 - 4n$ stets ein Vielfaches von 8 ist.
Da der Plattenleger jedoch stets $4n^2 - 4n + \mathbf{1}$ Platten braucht, hat er immer eine Platte zu wenig bzw. 7 zu viel gekauft!

Aufgabe 1.1.1.12. ***(Fehlersuche)*** *Man beweise oder widerlege folgende Gleichungen. Korrigieren Sie gegebenenfalls!*

(N) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$
(E) $(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^2 + 80a^2b^2 + 25b^4$
(A) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$
(S) $16 + 8a + a^2 = (4a)^2$
(T) $(o - c)^2 = o^2 - oc + c^2$
(M) $p^2 - p2q + q^2 = (p - q)^2$
(O) $(w + i)(-i + w) = w^2 - i^2$
(R) $z^2 + j^2 + zj2 = (z + j)^2$
(I) $(24h - 12b)^2 = 576h^2 - 48hb + 144b^2$
(P) $(r + s)^2 = r + 2rs + s$
(C) $(f - k)^2 = f^2 - k^2 + 2fk$
(O) $u^2 - v^2 = (v - u)(u + v)$
(K) $(c + d)^3 = c^3 + d^3$

Hilfe: Fügt man die Buchstaben vor den richtigen Gleichungen zusammen, ergibt sich ein europäischer Stadtname.
Lösung:

(N) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ *- - also falsch!*
(E) $(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^4 + 80a^2b^2 + 25b^4$ *. Bei der vorliegenden Lösung wurde vergessen,* a^2 *zu* a^4 *zu quadrieren.*
(A) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *und nicht* $a^2 - b^2$ *.*
(S) $16 + 8a + a^2$ *kann zu* $(4 + a)^2$ *vereinfacht werden, die vorliegende Lösung ist hingegen falsch.*
(T) $(o - c)^2 = o^2 - 2oc + c^2$ *und nicht* $o^2 - oc + c^2$ *.*
(M) $p^2 - p2q + q^2 = p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2$ *ist korrekt, so dass wir mit "M" unseren ersten Buchstaben erhalten.*
(O) $(w + i)(-i + w) = (w + i)(w - i) = w^2 - i^2$ *ist ebenfalls richtig, wir erhalten damit ein "O".*
(R) $z^2 + j^2 + zj2 = z^2 + 2jz + j^2 = (z + j)^2$ *auch dies ist richtig und der dritte Buchstabe ist damit ein "R".*
(I) $(24h - 12b)^2 = 576h^2 - 576hb + 144b^2$ *. Es wurde oben also vergessen, im mittleren Term mit 12 zu multiplizieren.*
(P) $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$ *auch in diesem Fall war die Umformung falsch.*
(C) $(f - k)^2 = f^2 + k^2 - 2fk$ *hier lag ein Vorzeichenfehler vor.*
(O) $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ *und nicht* $(v - u)(u + v)$*.*
(K) $(c + d)^3 = (c + d)^2 \cdot (c + d) = (c^2 + 2cd + d^2)(c + d) = c^3 + c^2d + 2cd^2 + 2c^2d + d^2c + d^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$ *und nicht* $c^3 + d^3$ *.*

Das Lösungswort ist demnach "Rom".

Aufgabe 1.1.1.13. ***(Veranschaulichung)*** *Veranschaulichen Sie die folgenden Terme geometrisch. Ordnen Sie auch die einzelnen Summanden (und Subtrahenden) in der ausmultiplizierten Form den jeweiligen Teilflächen zu!*

- $(3a + 4b)^2$ *für* $a, b > 0$
  Lösung:

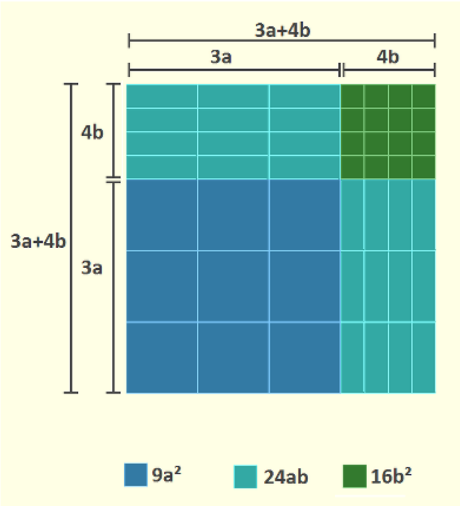

Bild 1.1.1.13 *Geometrische Veranschaulichung von* $(3a + 4b)^2$*; mit der Annahme* $b > a$ *Created by: Marie-Alisa Gembus.*

- $(4c - a)^2$ *für* $4c > a > 0$
  Lösung:

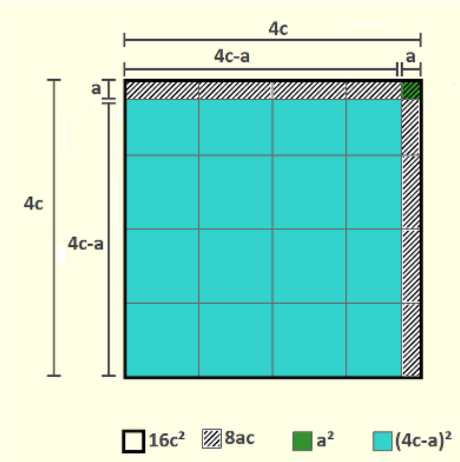

Bild 1.1.1.13 *Geometrische Veranschaulichung von* $(4c-a)^2$*; mit der Annahme* $c > a$ *Created by: Marie-Alisa Gembus.*

Aufgabe 1.1.1.14. *Setzen Sie jeweils Zahlen bzw. Rechenoperationssymbole statt der Kästchen so ein, dass die sich ergebenden Gleichungen richtig sind!*

- $(a-2b)^2 = \square \; -4ab+ \; \square \; b^2$
  Lösung:
  Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich:
  $$(a-2b)^2 = a^2 \; -4ab+ \; 4 \; b^2$$
- $(y \; \square \; 3z)^2 = y^2 - 6yz \; \square \; 9z^2$
  Lösung:
  Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich:
  $$(y \; - \; 3z)^2 = y^2 - 6yz \; + \; 9z^2$$
- $(2 \; \square \; a)(2 \; \square \; a) = 4 \; \square \; a^2$
  Lösung:
  Mit der 3. Binomischen Formel ergibt sich:
  $$(2 \; + \; a)(2 \; - \; a) = 4 \; - \; a^2$$
  Eine weitere richtige Lösung ist:
  $$(2 \cdot a)(2 \cdot a) = 4 \cdot a^2$$

Aufgabe 1.1.1.15. *Beweisen Sie allgemein oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel folgende Gleichungen. Wie lautet bei den falschen Aussagen die rechte Seite der Gleichung richtig?*

- $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$
  Lösung:
  Die erste Gleichung ist falsch: $(a \cdot b)^2 \neq a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$ *, denn mit* $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \neq 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^2 = 432$ *finden wir ein Gegenbeispiel. Richtig ist:* $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

- $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.
  Lösung:
  Die zweite Gleichung ist auch falsch: $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$, *denn* $(2+3)^3 = 5^3 = 125 \neq 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$. *Stattdessen gilt* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Aufgabe 1.1.1.16. *Man vereinfache:*

$$(5a+4)^2 - (3a-5)^2 + 4(a+3)(a-3) .$$

Lösung:

$(5a+4)^2 - (3a-5)^2 + 4(a+3)(a-3)$
$= 25a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a \cdot 4 + 16 - (9a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5 + 25) + 4(a^2 - 9)$
$= 25a^2 + 40a + 16 - 9a^2 + 30a - 25 + 4a^2 - 36$
$= 20a^2 + 70a - 45$.

Aufgabe 1.1.1.17. *Man vereinfache durch Faktorisieren und Kürzen:*

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} .$$

Man überlege zunächst, für welche a und b der Nenner Null ist. Welche a und b müssen ausgeschlossen werden?
Lösung:
Der Nenner des Terms darf nicht Null werden. Wegen $a^2 - ab = a(a-b)$ müssen die beiden Fälle $a = 0$ und $a = b$ ausgeschlossen werden.
Dann ergibt sich:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{a(a-b)} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} .$$

Aufgabe 1.1.1.18. *Wandeln Sie folgende Summen in Produkte um:*

- $25 + 4z^2 + 20z$
  Lösung:
  $$25 + 4z^2 + 20z = (2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot 5 + 5^2 = (2z+5)^2$$
- $-x^4y^2 + 9y^2$
  Lösung:
  $$-x^4y^2 + 9y^2 = (3y)^2 - (x^2y)^2 = (3y - x^2y)(3y + x^2y)$$
- $-4m^2b + 2m^3 + 2mb^2$
  Lösung:
  $$-4m^2b + 2m^3 + 2mb^2 = 2m(m^2 - 2mb + b^2) = 2m(m-b)^2$$

Aufgabe 1.1.1.19. *Faktorisieren Sie:*

- $a(a+2) - (b+1)(b-1)$
  Lösung:
  Wir multiplizieren zunächst aus und vereinfachen. Danach können wir nacheinander zwei binomische Formeln anwenden:

$$\begin{aligned} a(a+2) - (b+1)(b-1) &= a^2 + 2a - b^2 + 1 \\ &= a^2 + 2a + 1 - b^2 \\ &= (a+1)^2 - b^2 \\ &= ((a+1)+b) \cdot ((a+1)-b) \\ &= (a+1+b)(a+1-b) \end{aligned}$$

- $(a+b)(a-b)^3-(a-b)(a+b)^3$
  Lösung:
  Hier können wir direkt $(a+b)(a-b)$ ausklammern und dann vereinfachen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)^3-(a-b)(a+b)^3 &= (a+b)(a-b)\left((a-b)^2-(a+b)^2\right)\\ &= (a+b)(a-b)\left(a^2-2ab+b^2-(a^2+2ab+b^2)\right)\\ &= (a+b)(a-b)(a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2)\\ &= (a+b)(a-b)(-4ab)\end{aligned}$$

- $(a-b)^2(a+b)^5+(a+b)^2(a-b)^5$
  Lösung:
  Auch hier können wir direkt ausklammern und anschließend vereinfachen:

$$\begin{aligned}(a-b)^2(a+b)^5+(a+b)^2(a-b)^5 &= (a-b)^2(a+b)^2\left((a+b)^3+(a-b)^3\right)\\ &= (a-b)^2(a+b)^2\left((a^2+2ab+b^2)(a+b)+(a^2-2ab+b^2)(a-b)\right)\\ &= (a-b)^2(a+b)^2(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)\\ &= (a-b)^2(a+b)^2(2a^3+6ab^2)\\ &= 2a(a-b)^2(a+b)^2(a^2+3b^2)\end{aligned}$$

- *etwas schwerer:* $a^4-2a^3+a^2-1$
  Lösung:

$$\begin{aligned}a^4-2a^3+a^2-1 &= a^2(a^2-2a+1)-1\\ &= a^2(a-1)^2-1\\ &= \left(a(a-1)\right)^2-1^2\\ &= \left(a(a-1)-1\right)\left(a(a-1)+1\right)\\ &= (a^2-a-1)(a^2-a+1)\end{aligned}$$

Aufgabe 1.1.1.20. *Man löse die Klammern auf:*

$$(a+b+c)^2\,.$$

Lösung:
$(a+b+c)^2$
$=(a+b+c)(a+b+c)$
$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Aufgabe 1.1.1.21. *Man berechne mit den binomischen Formeln:*

$$1{,}002^2,\quad 0{,}999^2$$

und vergleiche das Ergebnis mit dem Taschenrechner.
Lösung:

$$1{,}002^2=(1+0{,}002)^2=1^2+2\cdot 0{,}002+0{,}002^2=1+0{,}004+0{,}000004=1{,}004004$$
$$0{,}999^2=(1-0{,}001)^2=1^2-2\cdot 0{,}001+0{,}001^2=1-0{,}002+0{,}000001=0{,}998001$$

Aufgabe 1.1.1.22. *Man fasse folgende Summe von Brüchen zu einem Bruch zusammen:*

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

Welche a,b müssen ausgeschlossen werden?
Lösung:
Ausgeschlossen werden muss eine Null im Nenner. Demnach muss $a+b\neq 0$ und somit $a\neq -b$ gelten. Des Weiteren

muss auch $a - b \neq 0$ sein, so dass auch $a \neq b$ vorausgesetzt werden muss. Der Nenner des dritten Terms führt zu keinen weiteren Ausnahmen, da $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ gilt und dieses Produkt nur dann Null wird, wenn einer der beiden bereits betrachteten Fälle eintritt.
Somit muss insgesamt nur $a = -b$ und $a = b$ ausgeschlossen werden.

Beim Zusammenfassen ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2-a^2} &= \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{2ab}{(b^2-a^2)} \\
&= \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{b(a+b)}{a^2-b^2} + \frac{2ab(-1)}{(b^2-a^2)(-1)} \\
&= \frac{a^2-ab}{a^2-b^2} + \frac{ba+b^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{a^2-ab+ba+b^2-2ab}{a^2-b^2} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\
&= \frac{a-b}{a+b}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.1.1.23. *Das untere Bild zeigt eine dreidimensionale Darstellung einer anderen Formel.*
a) Finden Sie eine Gleichung, die durch dieses Bild dargestellt werden kann.
b) Können Sie die einzelnen Summanden in der ausmultiplizierten Form den Puzzleteilen zuordnen?

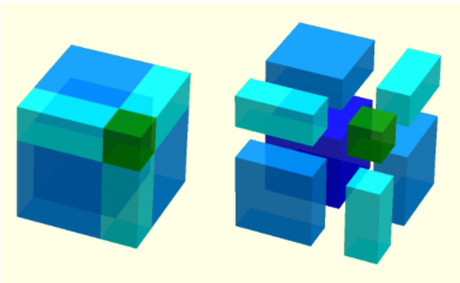

Bild 1.1.1.23 *Created by: Marie-Alisa Gembus.*

Lösung:
zu a.)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + b^3$$

zu b.) Wenn a das längere Seitenstück und b das kürzere ist, dann entspricht

- *a^3 dem dunkelblauen inneren Würfel,*
- *a^2b den hellblauen Quadern,*
- *ab^2 den drei türkisen Quadern und*
- *b^3 dem grnen Würfel.*

Wenn b das längere und a das kürzere Seitenstück ist, dann entsprechend andersherum.

Aufgabe 1.1.1.24. *In der letzten Aufgabe haben wir uns mit einer dreidimensionalen Visualisierung eines Terms auseinandergesetzt. Können Sie ein analoges Puzzle für den Term $(a+b+c+d)^3$ entwickeln?*
Lösung:
Der Term hat in der ausmultilpizierten und vereinfachten Form 20 Summanden, sodass sich auch der Würfel aus 20 verschiedenen Teilen zusammensetzt. 4 Puzzleteile liegen innerhalb des Würfels und wurden daher nicht dargestellt.

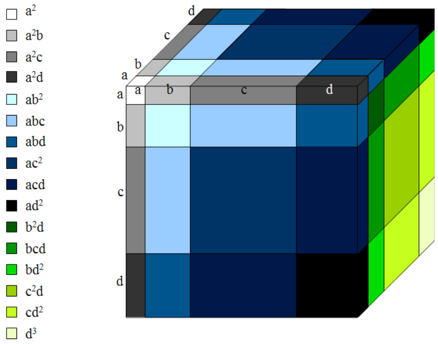

Bild 1.1.1.24 *Created by: Pascal Rolf Fischer.*

Aufgabe 1.1.1.25. ***Pascalsches Dreieck und die binomischen Formeln***

- *Betrachten Sie die ausmultiplizierte Darstellung der Terme* $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ *und* $(a+b)^6$. *Können Sie einen Zusammenhang mit dem Pascal'schen Dreieck erkennen?*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Bild 1.1.1.25 *Das Pascal'sche Dreieck. Eine Zeile entsteht indem Sie jeweils zwei Zahlen in der vorherigen Zeile addieren und die Zahlen 1 am Rand ergänzen. Created by: Marie-Alisa Gembus.*

Lösung:
Es ergibt sich sortiert

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\end{aligned}$$

Zusammenhang zum Pascalschen Dreieck: Schreibt man die einzelnen Summanden wie hier geschehen mit absteigenden $a-$*Potenzen auf, so lassen sich die Zahlen vor den Variablen (die so genannten "Koeffizienten") direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen: Die Koeffizienten für* $(a+b)^5$ *lassen sich beispielsweise in der sechsten Zeile finden. Außerdem beträgt in der ausmultiplizierten Form von* $(a+b)^n$ *die Summe der Exponenten von* a *und* b *bei den einzelnen Summanden stets* n.

- *Geben Sie für ein allgemeines* $n \in \mathbb{N}$ *ein System zur Entwicklung der ausmultiplizierten Form von* $(a+b)^n$ *an und wenden Sie es auf den Term* $(a+b)^8$ *an (ohne zu rechnen)!*
  Lösung:
  Man schreibt die a *- Potenzen absteigend und die* b *- Potenzen aufsteigend, so, dass die Summe der Exponenten von* a *und* b *bei den einzelnen Summanden stets* n *ergibt. Die Koeffizienten für* $(a+b)^n$ *lassen sich in der* $\boldsymbol{n+1}$ *Zeile des Pascalschen Dreieck finden.*

Für $(a+b)^8$ ergibt sich analog aus der neunten Zeile:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8\,.$$

- *Können Sie auch $(a+b)^9$ ausmultiplizieren?*
  Lösung:
  Für $(a+b)^9$ benötigt man zunächst die 10. Zeile des Pascal'schen Dreiecks. Betrachtet man die einzelnen Zahlen im Dreieck noch einmal genauer, so stellt man fest, dass sich diese stets durch Addition der beiden darüber stehenden Zahlen berechnen lassen.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
 & \searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow\searrow & + & \swarrow & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1
\end{array}$$

  Insgesamt folgt damit:

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

- *In ganz ähnlicher Weise kann man Terme der Form $(a-b)^n$ betrachten. Bestimmen Sie für kleine $n \in \mathbb{N}$ die ausmultiplizierte Form. Was fällt Ihnen auf?*
  Können Sie wieder ein System für die Entwicklung der ausmultiplizierten Form angeben?
  Lösung:
  Analoges gilt für $(a-b)^n$, nur muss hier zusätzlich auf die Vorzeichen geachtet werden:

$$\begin{array}{rcl}
(a-b)^2 &=& a^2 - 2ab + b^2\\
(a-b)^3 &=& a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\
(a-b)^4 &=& a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\\
(a-b)^5 &=& a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5
\end{array}$$

  Offensichtlich lassen sich auch hier die Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck ablesen, nur ist der erste Summand stets positiv, der zweite stets negativ, der dritte wieder positiv usw..